**Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije**

**Zavod za matematiku**

**Marulićev trg 19  10 000 Zagreb**

# Matematičke metode u kemijskom inženjerstvu

Studentice: Daniela Dekanić i Marina Galoić

ak. god: 2005/2006

# 9. Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Parcijalne diferencijalne jednadžbe su povezane sa različitim fizičkim i geometrijskim problemima kada su funkcije ovisne o dvije ili više nezavisnih varijabli. Te varijable mogu biti vrijeme ili jedna ili nekoliko koordinata u prostoru. Sljedeće poglavlje bit će posvećeno nekima od najvažnijih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje se pojavljuju u inženjerskim problemima. Izvest ćemo ove jednadžbe po fizičkim principima i razmotriti metode za rješavanje problema početnih i rubnih vrijednosti, tj. metode za dobivanje rješenja onih jednadžbi koje se odnose na dane fizičke situacije.

## 9.1. Glavni koncepti

Jednadžba koja uključuje jednu ili više parcijalnih derivacija ( nepoznate) funkcije dviju ili više nezavisnih varijabli naziva se parcijalna diferencijalna jednadžba. Red najviše derivacije naziva se **red** jednadžbi.

Kao i kod običnih diferencijalnih jednadžbi kaže se da je parcijalna diferencijalna jednadžba **linearna** ako je prvog stupnja u zavisnoj varijabli i njezinim parcijalnim derivacijama. Ako svaki izraz takve jednadžbe sadrži ili zavisnu varijablu ili jednu od njegovih derivacija, za jednadžbu kažemo da je **homogena**; u suprotnom je **nehomogena**.

*Primjer 1.* Neke važne linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda su :

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ jednodimenzionalna valna jednadžba

(2) $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ jednodimenzionalna toplinska jednadžba

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dvodimenzionalna Laplaceova jednadžba

(4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ dvodimenzionalna Poissonova jednadžba

(5) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ trodimenzionalna Laplaceova jednadžba;

ovdje je $c$ konstanta, $t$ je vrijeme, a $x,y,z$ su Kartezijeve koordinate. Jednadžba (4) ( sa $f \neq 0$) je nehomogena, dok su druge jednadžbe homogene.

**Rješenje** parcijalne diferencijalne jednadžbe u nekoj domeni R prostora nezavisnih varijabli je funkcija koja ima sve parcijalne derivacije koje se pojavljuju u jednadžbi i zadovoljava jednadžbu bilo gdje u R.

Općenito, broj ukupnih rješenja parcijalne diferencijalne jednadžbe je vrlo velik. Na primjer, funkcije

(6) $$u = x^2 - y^2, \qquad u = c^x \cos y\ , \qquad u = \ln\left(x^2 + y^2\right)\ ,$$

koje se u potpunosti razlikuju jedna od druge, su rješenja za (3), što se može i pokazati. Kasnije ćemo vidjeti da će jedinstveno rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe koje odgovara danom fizičkom problemu biti dobiveno upotrebom dodatne informacije koja proizlazi iz fizičke situacije. Na primjer, u nekim slučajevima vrijednosti traženog rješenja problema bit će dane na granici neke domene (**«rubni uvjeti»**); u drugim slučajevima kada je vrijeme $t$ jedna od varijabli , bit će zadane vrijednosti rješenja na $t=0$ (**«početni uvjeti»**).

Znamo da ako je *obična* diferencijalna jednadžba linearna i homogena, tada se superpozicijom poznatih rješenja mogu dobiti daljnja rješenja. Za homogenu linearnu *parcijalnu* diferencijalnu jednadžbu situacija je prilično slična i vrijedi sljedeći teorem.

**Temeljni teorem 1.** *Ako su $u_1$ i $u_2$ bilo koja rješenja linearne homogene parcijalne diferencijalne jednadžbe u nekom području , tada je*

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2\ ,$$

*gdje su $c_1$ i $c_2$ bilo koje konstante, također rješenje te jednadžbe u tom području.*

# 9.2. Vibrirajuća žica

## Jednodimenzionalna valna jednadžba

Kao prvu važnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu, derivirajmo jednadžbu određivanjem malih transverzalnih (3) vibracija elastične žice, koja ima duljinu $l$ i onda fiksirana na krajnjim točkama. Pretpostavimo da je žica napeta i u jednom trenutku, recimo $t=0$ , puštena da titra. Problem je odrediti vibracije žice, tj., naći njezino odstupanje $u(x,t)$ u nekoj točki $x$ i u nekom vremenu $t>0$; slika 244.

Kada se derivira diferencijalna jednadžba koja odgovara danom fizičkom problemu, obično moramo dati pojednostavljene pretpostavke da konačna jednadžba ne postane prekomplicirana. To vrijedi za obične diferencijalne jednadžbe, a za parcijalne diferencijalne jednadžbe situacija je slična.

U našem slučaju dajemo sljedeće pretpostavke.

*1. Masa žice po jedinici dužine je konstanta («homogena žica»).*
*Žica je savršeno elastična i ne pruža nikakav otpor savijanju.*

*2. Napetost uzrokovana restezanjem žice prije fiksiranja na krajnjim točkama je tako velika da se utjecaj gravitacijske sile na žicu može zanemariti.*

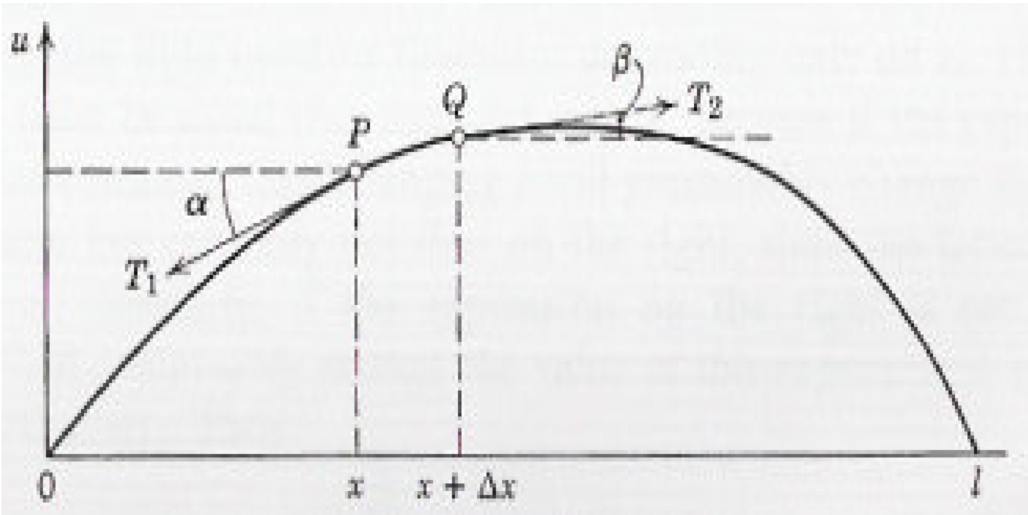
*3. Gibanje žice je mala transverzalna vibracija u vertikalnom smjeru, tj., svaka čestica žice giba se strogo okomito, i odstupanje i nagib na bilo kojoj točki žice su mali u apsolutnoj vrijednosti.*

Pretpostavke su takve da možemo očekivati da će biti dobiveno rješenje $u(x, t)$ diferencijalne jednadžbe i da će prilično dobro opisati male vibracije fizičke « neidealizirane» žice male homogene mase pod velikom napetošću.

Da bi se dobila diferencijalna jednadžba razmatramo sile koje djeluju na male dijelove žice (slika 244). Budući da žica ne pruža otpor savijanju, napetost je tangencijalna na zavoje žice u svakoj točki. Neka $T_1$ i $T_2$ budu napetosti na krajnjim točkama $P$ i $Q$ tog dijela žice. Budući da nema gibanja u horizontalnom smjeru, horizontalne komponente napetosti moraju biti konstantne. Analizirajući sliku 244, zaključujemo

(1) $$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = const.$$

U vertikalnom smjeru imamo dvije sile, poimence vertikalne komponente $-T_1 sin\alpha$ i $T_2 sin\beta$ od $T_1$ i $T_2$ ; ovdje se negativni predznak pojavljuje jer je ta komponenta na $P$ usmjerena prema dolje. Po Newtonovom drugom zakonu ,




Slika 244. Vibrirajuća žica

rezultanta tih dviju sila je jednaka umnošku mase $\rho\Delta x$ tog dijela i akceleracije $\partial^2 u/\partial t^2$, izračunata u nekoj točki između $x$ i $x+\Delta x$ ; gdje je $\rho$ gustoća mase nesavinute žice po jedinici dužine dijela nesavinute žice. Pa slijedi

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ .$$

Upotrebljavajući (1) dobivamo

(2) $$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .$$

Sada su *tanα* i *tanβ* nagibi zavoja žice na $x$ i $x+\Delta x$, tj.,

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \qquad \text{i} \qquad \tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

Ovdje moramo pisati parcijalne derivacije jer $u$ ovisi također o $t$ .
Djeljenjem (2) sa $\Delta x$ , dobivamo

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ .$$

Ako pretpostavimo da se $\Delta x$ približava nuli , dobivamo linearnu homogenu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad\qquad c^2 = \frac{T}{\rho} \ .$$

To je takozvana **jednodimenzionalna valna jednadžba**, koja opisuje naš problem. Oznaka $c^2$ (umjesto $c$) za fizičku konstantu $T/\rho$ izabrana je da bi se pokazalo da je ta konstanta pozitivna.

Rješenja jednadžbe će se prikazati u sljedećem odlomku.

## 9.3. Razdvajanje varijabli (Metoda produkta)

Vidjeli smo da su vibracije elastične žice opisane jednodimenzionalnom valnom jednadžbom

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ,$$

gdje je $u(x,t)$ otklon žice. Budući da je žica fiksirana na krajevima $x=0$ i $x=l$ , imamo dva **rubna uvjeta**

(2) $u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad$ za svaki $t$.

Forma gibanja žice ovisit će o početnom otklonu (otklonu na $t=0$) i o početnoj brzini kretanja u danom smjeru (brzina kod $t=0$). Označavanjem početnog otklona sa $f(x)$ i početne brzine sa $g(x)$, dobivamo dva **početna uvjeta**

(3) $u(x,0) = f(x)$

i

(4) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x).$

Naš problem je pronaći rješenje od (1) koje zadovoljava uvjete od (2) – (4). Nastavit ćemo korak po korak, kao što slijedi.

*Prvi korak.* Koristeći tzv. *metodu produkta,* ili *metodu razdvajanja (separacije) varijabli,* dobit ćemo dvije obične diferencijalne jednadžbe.

*Drugi korak.* Odrediti ćemo rješenja onih jednadžbi koje zadovoljavaju rubne uvjete.

*Treći korak.* Ta rješenja će biti sastavljena tako da će rezultat biti rješenje jednadžbe vala (1), zadovoljavajući također dane početne uvjete. Počnimo u detalje sa prvim korakom.

***Prvi korak.*** Produktna metoda daje rješenja od (1) u obliku

(5) $u(x,t) = F(x)G(t)$

koja su produkt dviju funkcija, gdje svaka ovisi samo o jednoj od varijabli $x$ i $t$ . Kasnije ćemo vidjeti da ta metoda ima više primjena u matematičkom inženjerstvu. Diferenciranjem (5) dobivamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G} \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G \ ,$$

gdje točke označavaju derivacije u odnosu na $t$ i crtice derivacije u odnosu na $x$. Ubacujući ovo u (1) dobivamo

$$F\ddot{G} = c^2 F''G$$

Dijeljenjem sa $c^2FG$ , dobivamo

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} \quad .$$

Izraz na lijevoj strani uključuje funkcije koje ovise samo o $t$ dok izraz na desnoj strani uključuje funkcije koje ovise samo o $x$. Iz toga slijedi da oba izraza moraju biti jednaka konstanti, nazovimo je $k$, jer ako izraz na lijevoj strani nije konstanta, tada mijenjanjem $t$-$a$ će se promjeniti vrijednost ovog izraza, ali ne sigurno onog na desno, budući da onaj na desnoj strani ne ovisi o $t$. Slično, ako izraz na desnoj strani nije konstanta, mijenjanjem $x$-$a$ će se promijeniti vrijednost ovog izraza, ali sigurno ne onog na lijevoj strani. Zbog toga

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = k \quad .$$

Iz ovog odmah proizlaze dvije obične linearne diferencijalne jednadžbe

(6) $$F'' - kF = 0$$

i

(7) $$\ddot{G} - c^2kG = 0 .$$

U ovim jednadžbama $k$ je još uvijek proizvoljana.

***Drugi korak.*** Sada ćemo odrediti rješenja $F$ i $G$ iz (6) i (7) tako da $u$=$FG$ zadovoljava (2), tj. ,

$$u(0,t) = F(0)G(0) = 0, \qquad u(l,t) = F(l)G(t) = 0 \qquad \text{za svaki t}$$

Očito, ako je $G\equiv 0$ , tada $u\equiv 0$ , što nam nije u interesu. Zbog toga $G\neq 0$ i tada

(8) $\quad (a)\ F(0) = 0 \qquad (b)\ F(l) = 0$ .

Za $k=0$ opće rješenje od (6) je $F = ax+b$ , i iz (8) dobivamo $a=b=0$. Iz toga slijedi da je $F\equiv 0$, što nam nije u interesu jer je tada $u\equiv 0$. Za pozitivni $k=\mu^2$ opće rješenje od (6) je

$$F = A\, e^{\mu x} + B\, e^{-\mu x},$$

i iz (8) dobivamo $F\equiv 0$, kao i prije. Budući da imamo mogućnost birati $k$ kao negativni, uzmimo da je $k = -p^2$. Tada (6) poprima oblik

$$F'' + p^2 F = 0,$$

i opće rješenje je

$$F(x) = A\cos px + B\sin px\,.$$

Iz ovog i iz (8) dobivamo

$$F(0) = A = 0 \qquad \text{i tada} \qquad F(l) = B\sin pl = 0.$$

Moramo uzeti $B\neq 0$ jer je inače $F\equiv 0$. Iz toga $\sin pl = 0$, tj.,

(9) $\quad pl = n\pi \;$ ili $\; p = \dfrac{n\pi}{l} \qquad$ (n je cijeli broj)

Uzimajući $B = 1$ , dobivamo beskonačno mnogo rješenja $F(x) = F_n(x)$,

(10) $\quad F_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{l}x \qquad$ n = 1,2,...,

koja zadovoljavaju (8). (Za negativni cijeli broj $n$ dobivamo uglavnom ista rješenja, osim uz negativni predznak, jer $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.)

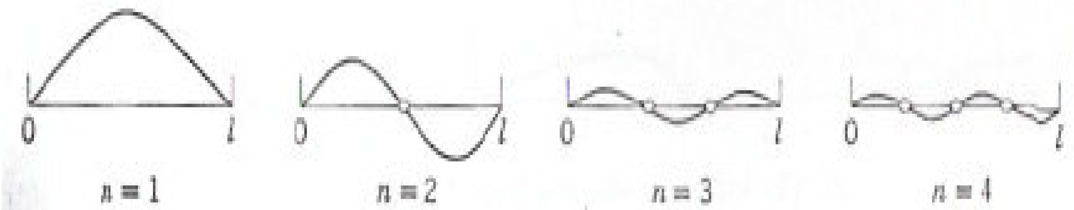
$k$ je sada ograničen na vrijednosti $k = -p^2 = -(n\pi/l)^2$, što slijedi iz (9).

Za ove $k$ jednadžba (7) poprima oblik

$$\ddot{G} + \lambda_n{}^2 G = 0 \qquad \text{gdje} \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l} \; .$$

Opće rješenje je

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n{}^* \sin \lambda_n t \; .$$




Slika 245.Normalni oblici vibrirajuće žice

Budući da su funkcije $u_n\,(x, t) = F_n\,(x)\, G_n\,(t)$ ; raspisano

(11) $$u_n(x,t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n{}^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad (n = 1,2,...)$$

rješenja od (1), zadovoljavajući rubne uvjete (2). Ove funkcije nazivaju se **svojstvene funkcije,** ili *karakteristične funkcije,* i vrijednosti $\lambda n = c\, n\, \pi / l$ se nazivaju **svojstvene vrijednosti,** ili *karakteristične vrijednosti,* vibrirajuće žice. Niz $\lambda_1, \lambda_2 ...$ se naziva *spektar.*

Vidimo da svaki $u_n$ predstavlja harmoničko gibanje sa frekvencijom titraja $\lambda_n / 2\pi = cn / 2l$ .To gibanje se naziva *n-ti* **normalni tonalitet** žice. Prvi normalni tonalitet je poznat kao *temeljni tonalitet ( n = 1 ),* i ostali kao *dodatni tonovi;* glazbeno oni daju oktave, oktave plus kvinta, itd. Pošto u

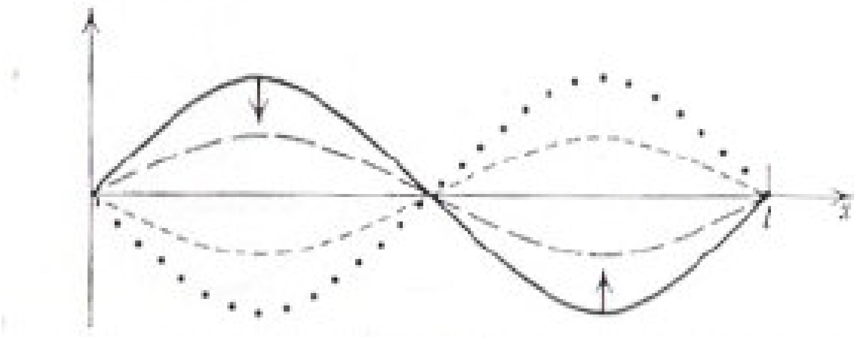
(11) $$\sin \frac{n\pi x}{l} = 0 \qquad \text{pri} \qquad x = \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, ..., \frac{n-1}{n} l \; ,$$

*n-ti* normalni tonalitet ima *n-1* takozvanih **čvorova** , tj., točke žice koje se ne gibaju (fiksirane su) (slika 245.)

Slika 246. pokazuje drugi normalni tonalitet za različite vrijednosti *t*. Na bilo kojoj udaljenosti žica ima oblik sinusoidalnog vala. Kada se lijevi dio žice giba prema dolje druga polovica se giba prema gore , i suprotno. Za druge tonalitete situacija je slična.

***Treći korak.*** Očito, samo rješenje $u_n(x,t)$ neće, općenito, zadovoljiti početne uvjete (3) i (4). Budući da je jednadžba (1) linearna i homogena, slijedi iz Temeljnog Teorema 1 u poglavlju 9.1 da je suma konačno mnogo rješenja $u_n$ rješenje od (1). Da bi se dobilo rješenje koje zadovoljava (3) i (4), promatramo beskonačni niz

(12) $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos\lambda_n t+B_n^{*}\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x \ .$$




Slika 246.Drugi normalni tonalitet za različite vrijednosti *t*

Iz ovog i (3) slijedi da je

(13) $$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x) \ .$$

Da bi jednadžba (12) zadovoljila početni uvjet (3), koeficijenti $B_n$ moraju biti izabrani tako da *u(x,0)* postane poluperiodičko proširenje reda od *f(x)*, koji se naziva Fourierov sinusni red od *f(x)* ; tj. jednadžba(4) iz poglavlja 8.5 [1]

(14) $$Bn = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \ , \qquad n = 1,2,...$$

Slično, diferenciranjem (12) i uzimajući u obzir $t$ i upotrebljavajući (4) dobivamo

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-B_n\lambda_n\sin\lambda_n t + B_n{}^*\lambda_n\cos\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n{}^*\lambda_n\sin\frac{n\pi x}{l} = g(x) \ .$$

Da bi (12) zadovoljila početni uvjet (4), koeficijenti $B_n$* moraju biti izabrani tako da, za $t=0$, $\partial u/\partial t$ postane Fourierov sinusni red od *g(x)* ; i prema (4) iz poglavlja 8.5 [1] ,

$$B_n{}^*\lambda_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

ili, pošto je $\lambda_n = cn\pi / l$,

(15) $$B_n{}^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \ , \qquad n = 1,2,...$$

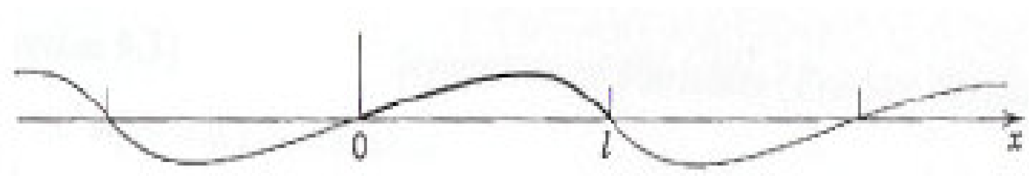
Slijedi da je *u(x,t)* , dano sa (12) sa koeficijentima (14) i (15), rješenje od (1) što zadovoljava uvjete (2) – (4) , omogučavajući da red (12) konvergira i također da se red dobiva diferenciranjem (12) dvaput uzimajući u obzir $x$ i $t$, konvergira i ima sume $\partial^2 u/\partial x^2$ odnosno $\partial^2 u/\partial t^2$, koji su u kontinuitetu.

Rješenje (12) je isprva čisti formalni izraz, a sada će postati stvaran. Zbog jednostavnosti razmatramo samo slučaj kada je početna brzina *g(x)* jednaka 0. Tada su $B_n$* nula, i (12) se reducira u oblik

(16) $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi x}{l}, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l} .$$

Moguće je zbrojiti ove nizove, tj. , napisati rezultat u zatvorenom ili konačnom obliku. Iz (11b) u poglavlju 0.1 slijedi da

$$\cos \frac{cn\pi}{l} t \sin \frac{n\pi}{l} x = \frac{1}{2}\left[ \sin\left\{ \frac{n\pi}{l}(x - ct) \right\} + \sin\left\{ \frac{n\pi}{l}(x + ct) \right\} \right] .$$




Slika 247. Neparno periodično proširenje f(x)

Zato (16) možemo pisati u obliku

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left\{ \frac{n\pi}{l}(x - ct) \right\} + \frac{1}{2}\sum_{n01}^{\infty} B_n \sin\left\{ \frac{n\pi}{l}(x + ct) \right\} .$$

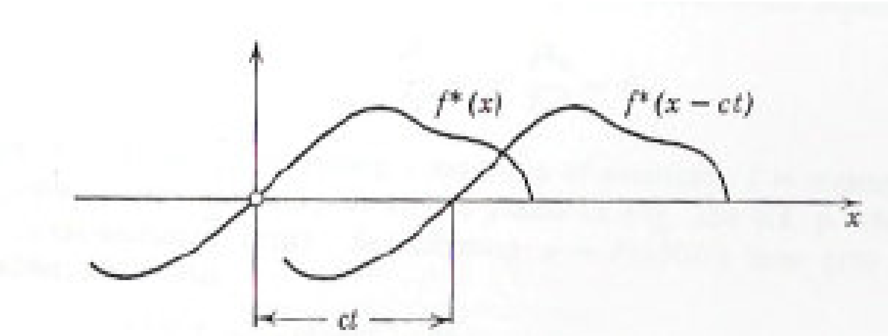
Ova dva reda su ona koja su održana zamjenom $x - ct$ odnosno $x + ct$ , za varijablu $x$ u Fourierovom sinusnom redu (13) za $f(x)$ . Zato,

(17) $$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[ f^*(x - ct) + f^*(x + ct) \right] ,$$

gdje je $f^*$ neparno periodično proširenje $f$ sa periodom $2l$ (slika 247). Budući da je početno odstupanje $f(x)$ kontinuirano u intervalu $0 \leq x \leq l$ i nula na krajnjim točkama, slijedi iz (13) da $u(x,t)$ je neprekinuta funkcija obiju varijabli $x$ i $t$ za sve vrijednosti varijabli. Diferenciranjem (17) vidimo da je $u(x,t)$ rješenje od (1), $f(x)$ je dvostruko diferencirano na intervalu $0 < x < l$ , i ima jednostrane druge derivacije na $x = 0$ i $x = l$ , koji su 0. Pri ovim uvjetima $u(x,t)$ je ustanovljeno kao rješenje od (1) , zadovoljavajući (2) – (4).

Ako su $f'(x)$ i $f''(x)$ po djelovima neprekinute (poglavlje 4.1[1] ), ili ako te jednostrane derivacije nisu nula, tada će za svaki $t$ biti konačno mnogo vrijednosti *x,* za koje druge derivacije od *u,* koje se pojavljuju u (1), ne postoje. Osim na tim točkama valna jednadžba bit će zadovoljena, i tada možemo uzeti u obzir *u(x,t)* kao rješenje našeg problema u užem smislu. Npr., slučaj trokutastog početnog odstupanja (primjer 1, ispod) vodi rješenju ovog tipa.

Spomenimo vrlo zanimljivu fizičku interpretaciju (17). Graf od $f^*(x-ct)$ je dobiven iz grafa od $f^*(x)$ mijenjanjem $ct$ jedinica od $f^*(x)$ na desno (slika 248). To znači da $f^*(x-ct)$ $(c>0)$ predstavlja val koji putuje na desno sa povečanjem $t$. Slično, $f^*(x+ct)$ predstavlja val koji putuje na lijevo, i $u(x,t)$ je superpozicija ovih dvaju valova.




Slika 248. Interpretacija (17)

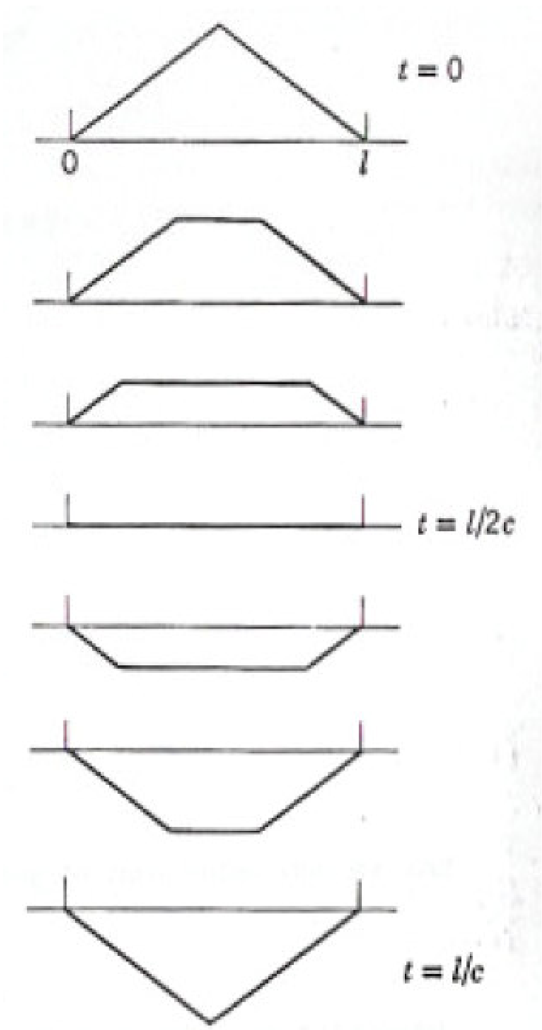
*Primjer 1.* Nađi rješenje jednadžbe vala (1) koja odgovara trokutnom početnom odstupanju

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{l}x & 0<x<l/2\\ \dfrac{2k}{l}(l-x) & l/2<x<l\end{cases}$$

i početnoj brzini nula. Pošto je $g(x)\equiv 0$, imamo $B_n^*=0$ u (12), i iz Primjera 1. u poglavlju 8.5 [1] vidimo da su $B_n$ dani sa (5), poglavlje 8.5[1]. Zato (12) poprima oblik

$$u(x,t)=\frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{l}x\cos\frac{\pi c}{l}t-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{l}x\cos\frac{3\pi c}{l}t+-...\right].$$

Za označavanje grafa rješenja možemo upotrijebiti $u(x,t) = f(x)$ i gornji prikaz dviju funkcija u prezentaciji (17). Ovo vodi grafu prikazanom na slici 249.




Slika 249. Rješenje primjera 1 za različite vrijednosti *t*

## 9.4 D' Alembertovo rješenje valne jednadžbe

Zanimljivo je primjetiti da se rješenje (17) u zadnjem poglavlju valne jednadžbe

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

može odmah dobiti transformacijom (1) u prikladan oblik, uvođenjem novih nezavisnih varijabli

(2) $$v = x + ct, \qquad z = x - ct.$$

$u$ tada postaje funkcija od $v$ i $z$, i derivacije u (1) se mogu izraziti u obliku derivacija uzimajući u obzir $v$ i $z$ upotrebom lančanog pravila iz poglavlja 5.15. Rješavanjem parcijalnih derivacija potpisivanjem, vidimo iz (2) da $v_x = 1$ i $z_x = 1$, zato ,

$$u_x = u_v v_x + u_z z_x = u_v + u_z\,.$$

Primjenom lančanog pravila na desnoj strani dobivamo

$$u_{xx} = (u_v + u_z)_x = (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x$$

Zbog $v_x = 1$ i $z_x = 1$, ovo postaje

$$u_{xx} = u_{vv} + 2u_{vz} + u_{zz}\,.$$

Druga derivacija u (1) se transformira istom procedurom, i rezultat je

$$u_{tt} = c^2\,(u_{vv} - 2u_{vz} + u_{zz}).$$

Ubacivanjem ovih dvaju rezultata u (1) dobivamo

(3) $$u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial z} = 0$$

Možemo integrirati ovu jednadžbu uzimajući u obzir $z$, te dobivamo

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

gdje je *h(v)* proizvoljna funkcija od *v*. Integriranjem ovog uzimajući u obzir *v* , dobivamo

$$u = \int h(v)dv + \psi(z)$$

gdje je $\psi(z)$ proizvoljna funkcija od *z*. Pošto je integral funkcija od *v* , recimo, $\varphi(v)$ , rješenje je u obliku

$$u = \varphi(v) + \psi(z) .$$

Zbog (2) možemo pisati

(4) $$u(x,t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct) .$$

Ovo je poznato kao **d' Alembertovo rješenje** valne jednadžbe (1).

Funkcije $\varphi$ i $\psi$ mogu biti određene iz početnih uvjeta. Ilustrirajmo ovo u slučaju nulte početne brzine i dane početnog odstupanja $u(x,0) = f(x)$ .

Diferenciranjem (4) imamo

(5) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c\phi'(x+ct) - c\varphi'(x-ct)$$

gdje crtice označavaju derivacije uzimajući u obzir sve argumente $x + ct$ odnosno $x - ct$. Iz (4), (5) i početnih uvjeta imamo

$$u(x,0) = \phi(x) + \varphi(x) = f(x)$$
$$ut(x,0) = c\phi'(x) - c\varphi'(x) = 0$$

Iz zadnje jednadžbe, $\psi' = \varphi'$. Zbog toga $\psi = \varphi + k$ , i iz toga i prve jednadžbe, $2\varphi + k = f$ ili $\varphi = (f - k) / 2$. Sa ovim funkcijama $\varphi$ i $\psi$ rješenje od (4) postaje

(6) $$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]$$

uzimajući u obzir (17) iz poglavlja 9.3. Može se pokazati da zbog rubnih uvjeta (2) u tom poglavlju funkcija *f* mora biti neparna i imati period *2l*.

Naš rezultat pokazuje da dva početna uvjeta i rubni uvjeti određuju jedinstveno rješenje.

## 9.5 Jednodimenzionalni protok topline

Protok topline u tijelu homogenog materijala određen je toplinskom jednadžbom (poglavlje 6.9)[1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \qquad\qquad c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}$$

gdje je *u(x,y,t)* temperatura u tijelu , K je toplinska vodljivost , $\sigma$ je specifična toplina , a $\rho$ je gustoća materijala tijela. $\nabla^2 u$ je Laplasian od *u*, i s obzirom na Kartezijeve koordinate *x,y,z*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ .$$


Slika 254. Razmatrana greda

Kao važnu primjenu, razmatramo temperaturu u dugoj tankoj gredi ili žici konstantnog poprečnog presjeka i homogenog materijala koji je orjentiran duž x-osi (slika 254) i odlično je bočno izolirana , tako da toplina teče samo duž x-osi. Tada *u* ovisi samo o *x* i vremenu *t*, i toplinska jednadžba postaje tzv. **jednodimenzionalna toplinska jednadžba**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ . \tag{1}$$

Dok valna jednadžba (poglavlje 9.2) uključuje *drugu* parcijalnu derivaciju $\partial^2 u/\partial t^2$ ,toplinska jednadžba uključuje *prvu* derivaciju $\partial u/\partial t$ i vidjet ćemo da su rješenja od (1) potpuno drukčija od onih od valne jednadžbe, iako je proces rješavanja (1) prilično sličan onome u slučaju valne jednadžbe. Rješit ćemo (1) za neke važne tipove rubnih i početnih uvjeta.

Počnimo sa slučajem kada su krajevi grede $x = 0$ i $x = l$ držani na temperaturi nula. Tada su *rubni uvjeti*

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad u(l,t) = 0 \qquad \text{za sve } t \tag{2}$$

Neka $f(x)$ bude početna temperatura u gredi. Tada su *početni uvjeti*

$$u(x,0) = f(x) \ , \tag{3}$$

gdje je $f(x)$ dana funkcija. Odredit ćemo rješenje $u(x,t)$ od (1), zadovoljavajući (2) i (3).

***Prvi korak.*** Upotrebljavajući metodu separacije varijabli, prvo odredimo rješenja od (1) koja zadovoljavaju rubne uvjete od (2). Počinjemo od

$$u(x,t) = F(x)G(t) \ . \tag{4}$$

Diferenciranjem i zamjenom ovoga u (1), dobijemo

$$F\dot{G} = c^2 F''G$$

gdje točke označavaju derivacije u odnosu na $t$ i crtice označavaju derivacije u odnosu na $x$ . Dijeljenjem sa $c^2FG$ , imamo

$$\frac{\dot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} \quad . \tag{5}$$

Izraz na lijevoj strani ovisi samo o $t$ , dok desna strana ovisi samo o $x$. Kao u poglavlju 9.3, zaključujemo da oba izraza moraju biti jednaki konstanti, recimo, $k$. Može se pokazati da za $k \geq 0$ jedino rješenje $u = FG$ koje zadovoljava (2) je $u \equiv 0$. Za negativni $k = - p^2$ dobivamo iz (5)

$$\frac{\dot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} = -p^2$$

i iz ovih dviju običnih diferencijalnih jednadžbi

(6) $$F'' + p^2F = 0$$

i

(7) $$\dot{G} + c^2p^2G = 0$$

***Drugi korak.*** Razmatramo (6). Opće rješenje je

(8) $$F(x) = A\cos px + B\sin px\ .$$

Iz (2) slijedi da je

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \qquad \text{i} \qquad u(l,t) = F(l)G(t) = 0$$

Pošto je $G \equiv 0$ znači $u \equiv 0$ , zahtjevamo da je $F(0) = 0$ i $F(l) = 0$. Iz (8), $F(0) = A$. Jer je $A = 0$ i zato je,

$$F(l) = B\sin pl.$$

Moramo imati $B \neq 0$ , jer je inače $F \equiv 0$. Zato stanje $F(l) = 0$ vodi do

$$\sin pl = 0 \qquad \text{ili} \qquad p = \frac{n\pi}{l} \qquad n = 1,2,...$$

Za $B = 1,$ dobivamo rješenja

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad n = 1,2,...$$

od (6), zadovoljavajući (2). (Kao i u poglavlju 9.3, ne trebamo razmatrati negativne vrijednosti cijelih brojeva od n).

Za vrijednosti $p = n\pi/l$ jednadžba (7) poprima oblik

$$\dot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \qquad \text{gdje je} \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{l}\ .$$

Opće rješenje je

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t} \quad , \qquad\qquad n = 1,2,...,$$

gdje je $B_n$ konstanta. Iz toga su funkcije

(9) $$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \qquad n = 1,2,...$$

rješenja toplinske jednadžbe (1), zadovoljavajući (2).
***Treći korak.*** Da bi pronašli rješenje koje također zadovoljava (3), razmatramo nizove

(10) $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\lambda_n^2 t} \qquad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{l}\right)$$

Iz ovog i (3) slijedi da

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} = f(x) \quad .$$

Zato, da bi (10) zadovoljila (3) , koeficijenti $B_n$ moraju biti izabrani tako da *u(x,0)* postane poluperiodičko proširenje reda od *f(x)* , tj., Fourierovi sinusni redovi od *f(x);* tj., dio (4) iz poglavlja 8.5[1] ,

(11) $$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx \qquad n = 1,2,...$$

Rješenje našeg problema se može dobiti, pretpostavljajući da je *f(x)* po dijelovima neprekinuta u intervalu $0 \le x \le l$ (strana 195)[1] , i ima jednostrane derivacije na svim unutrašnjim točkama toga intervala; tj. , pod ovim pretpostavkama red u (10) sa koeficijentima (11) je rješenje našeg fizičkog problema. Dokaz, koji zahtjeva znanje jednolične konvergencije reda, biti će prikazan kasnije.

Zbog eksponencijalnog faktora svi izrazi u (11) približavaju se nuli kako se *t* približava beskonačnosti. Brzina isčezavanja varira sa *n*.

*Primjer 1.* Ako je početna temperatura

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < l/2 \\ 1 - x & l/2 < x < l \end{cases}$$

(slika 255 gdje $l = \pi$ i $c = 1$ ) , i tada dobivamo iz (11)

(12) $$B_n = \frac{2}{l}\left(\int_0^{l/2} x \sin\frac{n\pi x}{l} dx + \int_{l/2}^{l} (1-x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx\right) .$$

Integriranjem dobivamo $B_n = 0$ kada je $n$ konstantno i

$$B_n = \frac{4l}{n^2\pi^2} \qquad \text{(n = 1,5,9,...)},$$

$$B_n = -\frac{4l}{n^2\pi^2} \qquad \text{(n = 3,7,11,...)}.$$

Iz toga rješenje je

$$u(x,t) = \frac{4l}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{l} e^{-(c\pi/l)^2 t} - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{l} e^{-(3c\pi/l)^2 t} + \cdots\right]$$

Možete usporediti sliku 255 i sliku 249 iz poglavlja 9.3

## 9.6 Protok topline u beskonačnoj gredi

Razmatrat ćemo rješenja toplinske jednadžbe

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

u slučaju grede koja se proteže do beskonačnosti na obje strane (i koja je bočno izolirana, kao i prije). U ovom slučaju nemamo rubne uvjete samo početni uvjet

(2) $u(x,0) = f(x)$ $( -\infty < x < \infty )$

gdje je $f(x)$ dana početna temperatura grede.

Da bi riješili naš problem počinjemo kao i u prethodnom dijelu (poglavlju) , tj., zamijenimo $u(x,t) = F(x)G(t)$ u (1). Iz ovoga proizlaze dvije obične diferencijalne jednadžbe

(3) $F'' + p^2F = 0$ (dio (6), poglavlje 9.5 )

i

(4) $G + c^2p^2G = 0$ (dio (7), poglavlje 9.5 )

Funkcije

$$F(x) = A\cos px + B\sin px \qquad \text{i} \qquad G(t) = e^{-c^2p^2t}$$

su rješenja od (3) odnosno (4) , gdje su $A$ i $B$ proizvoljne konstante. Iz toga slijedi da je,

(5) $$u(x,t;p) = FG = (A\cos px + B\sin px)e^{-c^2p^2t}$$

rješenje od (1) . (Kao i u predhodnom poglavlju morali smo izabrati konstantu razdvajanja $k$ kao negativnu, $k = - p^2$ , jer pozitivne vrijednosti od $k$ vode do rastuće eksponencijalne funkcije u (5), što nema fizičkog značenja).

Bilo koje redovi funkcija (5), dobiveni na uobičajen način uzimanjem $p$ kao višekratnik fiksnog broja, vodile bi do funkcije koja je periodična u $x$ kada je $t = 0$. Ipak, pošto za $f(x)$ u (2) nije pretpostavljeno da je periodična, prirodno je upotrijebiti Fourierove integrale u ovom slučaju umjesto Fourierovih redova.

Pošto, su $A$ i $B$ u (5) proizvoljni, možemo razmatrati ove veličine kao funkcije od $p$ i pisati $A = A(p)$ i $B = B(p)$. Pošto je toplinska jednadžba linearna i homogena, funkcija

(6) $$u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t;p)dp = \int_0^\infty [A(p)\cos px + B(p)\sin px]e^{-c^2p^2t}dp$$

je tada rješenje od (1), s time da ovaj integral postoji i može se diferencirati dvaput uzimajući u obzir $x$ i jedanput uzimajući u obzir $t$.

Iz (6) i početnog uvjeta (2) slijedi da

(7) $$u(x,0) = \int_0^\infty \left[A(p)\cos px + B(p)\sin px\right]dp = f(x).$$

Upotrebljavajući (4) i (5) iz poglavlja 8.10[1] , dobivamo

(8) $$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos pv dv \quad , \qquad B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin pv dv \ .$$

Prema (16) iz problema 20, poglavlje 8.10[1] , ovaj Fourierov integral može se pisati

$$u(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(px - pv)dv\right]dp \quad ,$$

i (6), iz ovog poglavlja, tada postaje

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(px - pv)e^{-c^2p^2t}dv\right]dp .$$

Pod pretpostavkom da bi mogli preokrenuti redoslijed integriranja, dobivamo

(9) $$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_0^\infty e^{-c^2p^2t}\cos(px - pv)dp\right]dv .$$

Unutarnji integral može se procijeniti upotrebom formule

(10) $$\int_0^\infty e^{-s^2}\cos 2bs ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$$

koja će se derivirati u poglavlju 15.4 (problem 29). Uvođenjem nove varijable integracije $p$ umetanjem $s = cp\sqrt{t}$ i odabirom

$$b = \frac{x - v}{2c\sqrt{t}}$$

vidimo da formula (10) postaje

$$\int_0^\infty e^{-c^2p^2t}\cos(px-pv)dp=\frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}}e^{-(x-v)^2/4c^2t}$$

Umetanjem ovog rezultata u (9) dobivamo

(11) $$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right\}dv\,.$$

Konačno, uvođenjem varijable integracije $w=(v-x)/2c\sqrt{t}$, vidimo da se ovo može pisati kao

(12) $$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+2cw\sqrt{t})e^{-w^2}dw\,.$$

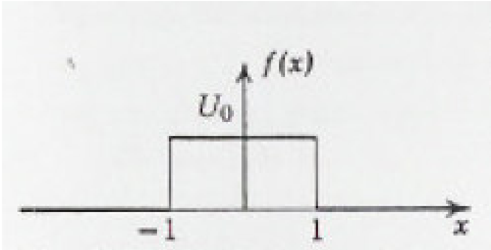
Ako je *f(x)* ograničena za sve vrijednosti $x$ i može se integrirati u svakom konačnom intervalu, može se vidjeti da funkcija (11) ili (12) zadovoljava (1) i (2). Zato je ova funkcija traženo rješenje u ovom slučaju.

*Primjer 1.* Pronađi temperaturu u beskonačnoj gredi ako je početna temperatura (slika 256)

$$f(x)=\begin{cases}U_0=const & |x|<1\\ 0 & |x>1|\end{cases}$$

Iz (11) imamo

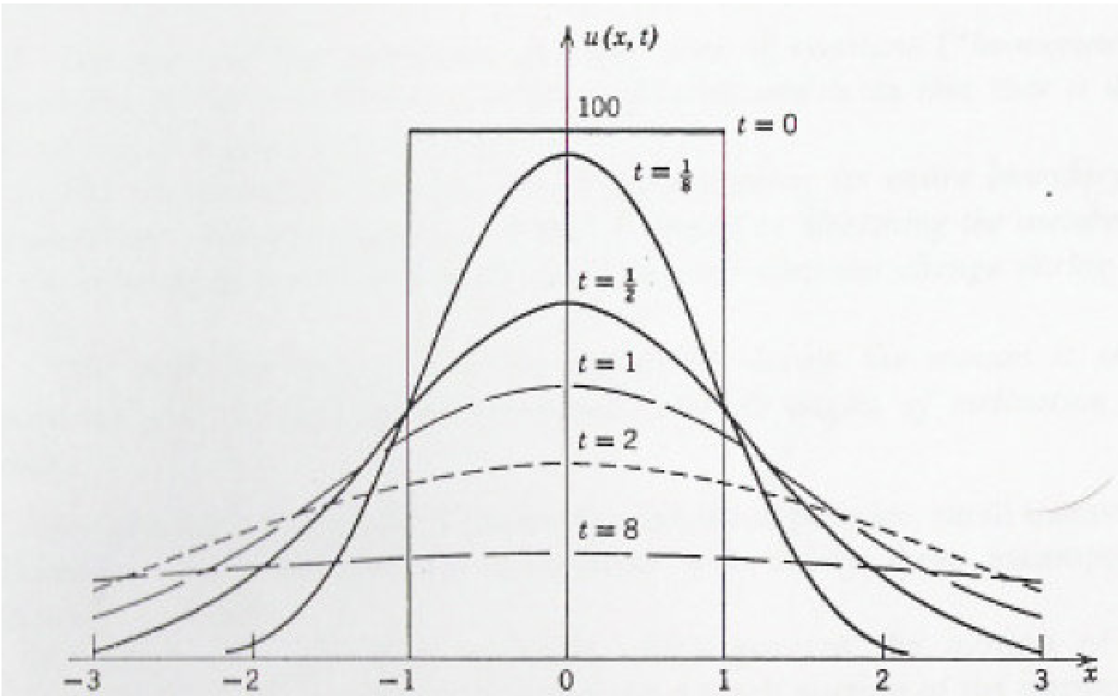
$$u(x,t)=\frac{U_0}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-1}^{1}\exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right\}dv\;.$$




primjeru 1.

Ako uvedemo gornju varijablu integracije $w$ , tada integracija preko $v$ od -1 do 1 odgovara integraciji preko $w$ od $(-1-x)/2c\sqrt{t}$ do $(1-x)/2c\sqrt{t}$ i tada dobivamo

$$(13) \qquad u(x,t)=\frac{U_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-(1+x)/2c\sqrt{t}}^{(1-x)/2c\sqrt{t}} e^{-w^2}\,dw \qquad (t > 0).$$




Slika 257. Riješenje *u(x,t)* primjera 1 za $U_0 = 100\ °C$, $c^2 = 1\ cm^2/sek$, i nekoliko vrijednosti od *t*.

Kasnije ćemo vidjeti da ovaj intrgral nije elementarna funkcija, ali se lako može izraziti u obliku tzv., *greška funkcije* , čije vrijednosti su u tablici (poglavlje 17.2; također problemi 10 – 16 , ovo poglavlje). Slika 257 pokazuje $u(x,t)$ za $U_0 = 100° C$ , $c_2 = 1\ cm^2 / sek$, i nekoliko vrijednosti od $t$.

LITERATURA

[1] A.E.Kreyzig : « Advanced engineering mathematics « John Wiley & Sons Inc. (1995)